



УДК: 531.43

MSC 2010: 70E18, 70F40, 74M10

## О движении тяжелого тела с кольцевым основанием по горизонтальной плоскости и загадках керлинга

А. П. Иванов, Н. Д. Шувалов

Обсуждается динамика осесимметричного твердого тела, опирающегося кольцевой площадкой на горизонтальную шероховатую плоскость. Исследована взаимосвязь между характером закона трения и кривизной траектории тела. Для случая камня, движущегося по льду (керлинг), показано, что наблюдаемые эффекты можно качественно объяснить при использовании зависимости коэффициента трения от числа Гюмбеля. Разработана методика построения закона трения по экспериментальным данным. Показано, что имеющиеся данные можно количественно обосновать лишь при помощи анизотропного трения. Построена простейшая модель такого трения, обеспечивающая совпадение с экспериментом.

Ключевые слова: смешанное трение, кривая Штрибека, динамика керлинга

### 1. Постановка задачи

Керлинг — старинная шотландская командная игра (XVI век), которую иногда называют «шахматами на льду». С 1988 игра обрела олимпийский статус. Современные снаряды для этой игры имеют форму диска диаметром до 29 см, высотой не менее 11.4 см и массы до 20 кг. Они изготавливаются из особого гранита, добываемого в основном в Шотландии и Уэльсе. Нижняя часть снаряда вогнута, так что он опирается на лед кольцевой площадкой

---

Получено 12 июля 2011 года

После доработки 21 августа 2011 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00354) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-3797.2010.1). Работа А. П. Иванова поддержана грантом Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

---

Иванов Александр Павлович

[apivanov@orc.ru](mailto:apivanov@orc.ru)

Шувалов Николай Дмитриевич

[shuvalovnickolay@gmail.com](mailto:shuvalovnickolay@gmail.com)

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

диаметром 12.5–13 см и шириной 6–13 мм (параметры площадки правилами не регламентированы). В верхней части снаряда имеется ручка, держась за которую спортсмен сообщает снаряду начальную скорость; далее камень движется по инерции в сторону «дома», по пути выбивая другие камни или огибая их в зависимости от тактической задачи. «Дом» представляет собой круглую мишень диаметром 3.66 м, расположенную на расстоянии около 28 м от зоны броска. Ледяная площадка тщательно выравнивается, а затем на ней при температуре  $-5^{\circ}\text{C}$  разбрызгиваются капли воды, намерзающие в виде гранул. На обработанной таким образом поверхности площадь фактического контакта камня составляет лишь около 5% от номинальной площади опорного кольца. Данное обстоятельство весьма существенно, так как при увеличении давления происходит таяние льда и уменьшение трения. Кроме того, на гладкой поверхности льда траектория камня практически прямолинейна, а на «пупырчатом» льду она искривляется даже при небольшой (порядка  $1\text{ с}^{-1}$ ) начальной угловой скорости. Такое поведение существенно обогащает игру, так как позволяет умелому игроку поставить свой камень в центр мишени, огибая по пути другие камни. Во время движения камня разрешается натирать лед перед ним щетками (так называемый «сви́пинг») для изменения температуры, что приводит к уменьшению коэффициента трения, увеличению дальности броска и уменьшению кривизны траектории.

Причина эффекта искривления траектории кроется, очевидно, в асимметрии сил трения, действующих в области контакта. Удивительно другое: если цилиндр, закрученный против часовой стрелки, при скольжении по полу смещается вправо (аналогично ведет себя бильярдный шар при обводном ударе), то камень на льду смещается в противоположную сторону! При этом это смещение проявляется в основном на заключительном участке траектории, когда скорость скольжения становится достаточно малой. Кроме того, общая величина смещения (до 1 м) слабо зависит от начальной угловой скорости (в диапазоне 0.3–1.5 рад/с, который используют спортсмены).

Исследованию динамики керлинга посвящено значительное число работ, включая [1–9]. Отметим следующие результаты.

По общему мнению, искривление траектории обусловлено в первую очередь асимметрией в распределении нормальной нагрузки, причем в передней части давление больше, чем в задней. Джонстон объяснил смещение камня влево наличием убывающей зависимости коэффициента трения от давления [2]. Пеннер установил экспериментальную зависимость

$$\mu = 0.008v^{-1/2}, \quad (1.1)$$

где скорость  $v$  выражена в м/с, а также отметил, что в медленной части области контакта могут иметь место адгезионные эффекты [6]; по его мнению, ни одна из существующих моделей не объясняет динамику керлинга.

Шегельский предположил [5], что коэффициент трения в точках контактного кольца вычисляется по формуле

$$\mu(\theta) = \mu_0(1 - f_0 \cos \theta), \quad (1.2)$$

где  $\theta$  — угол между радиусом, проведенным в данную точку кольца, и направлением скорости центра. При интегральном расчете сил и момента трения распределение нормальной нагрузки считалось постоянным.

Денни высказал предположение [7] об изменении условий контакта в процессе движения камня вследствие сбивания «пупырышков». На переднюю часть контактного кольца налипают снежная крошка, что приводит к уменьшению коэффициента трения в этих точках. В начальный момент движения поверхность кольца чистая (об этом позаботился

игрок перед броском). Через небольшое время фронтальная часть «загрязняется». Вследствие вращения «загрязненная» часть с уменьшенным коэффициентом трения постепенно распространяется на все кольцо. При этом асимметрия коэффициента трения приводит к появлению составляющей сил трения, направленной влево.

Йенсен и Шегельский предложили [8] полуфеноменологическую модель динамики керлинга. Основываясь на экспериментальных данных, они считали, что главный вектор сил трения складывается из составляющей, противоположной вектору скорости центра и зависящей от модуля скорости по степенному закону, и ортогональной постоянной составляющей.

Перечисленные модели в той или иной степени могут служить для описания динамики керлинга. Их общий недостаток состоит в несоответствии законам динамики: реалистичная модель трения должна учитывать согласование между законом трения и распределением нормальных напряжений. Это согласование выражается следующей теоремой [10].

**Теорема 2.** Пусть твердое тело с плоским основанием, для которого одна из главных центральных осей инерции ортогональна основанию, движется по инерции по горизонтальной плоскости. Тогда вне зависимости от контактного закона (т. е. распределения нормальной нагрузки и закона трения) главный вектор сил трения  $\vec{T}$  ортогонален главному моменту нормальных реакций  $\vec{M}_N$ , причем векторы  $\vec{T}$ ,  $\vec{M}_N$  и  $\vec{k}$  (вертикальный орт) образуют правую тройку (рис. 1).

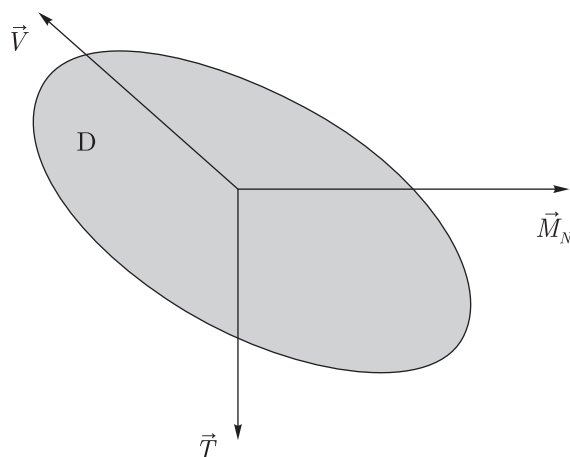


Рис. 1.

Цель данной работы состоит в исследовании различных законов трения для выяснения, какие из них могут привести к эффекту керлинга. При этом будем считать снаряд телом вращения, опирающимся на плоскость кольцевым основанием. Для упрощения расчетов будем полагать кольцо достаточно тонким, что позволяет считать распределение нормальной нагрузки линейным. Направление вращения камня для определенности считаем положительным (т. е. против часовой стрелки).

## 2. Уравнения движения камня

Введем на опорной плоскости инерциальную систему координат  $OX'Y'$ , а также подвижную систему координат  $G'XY$ , располагая ось  $Y$  из центра кольца в направлении

вектора скорости точки  $G'$ , ось  $X$  — вправо ( $G'$  — проекция центра масс на опору). Тело на плоскости имеет три степени свободы; в качестве обобщенных координат возьмем координаты  $x'$ ,  $y'$  точки  $G$  в инерциальной системе, а также угол поворота  $\varphi$ . Уравнения Ньютона–Эйлера имеют вид

$$m\ddot{x}' = T_{x'}, \quad m\ddot{y}' = T_{y'}, \quad m\rho^2\ddot{\varphi} = M, \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса тела,  $\rho$  — его радиус инерции,  $T_{x'}$ ,  $T_{y'}$  — проекции главного вектора сил трения на оси,  $M$  — вертикальная составляющая главного момента сил трения. Для расчета интегральных характеристик необходимо задать локальный закон трения

$$\vec{f}(A) = (f_{x'}(A), f_{y'}(A)), \quad A \in D, \quad (2.2)$$

где  $D$  — область контакта. Тогда

$$(T_{x'}, T_{y'}) = \iint \vec{f}(A) dx dy, \quad \vec{M} = \iint \vec{r}(A) \times \vec{f}(A) dx dy, \quad \vec{r}(A) = G'A \quad (2.3)$$

(интегрирование ведется по области  $D$ ).

Функция (2.2) определяется на основе эмпирических закономерностей, причем выбор ее далеко не очевиден. Для описания сухого трения традиционно используется закон Амонтона–Кулона

$$\vec{f} = -\mu \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} p, \quad (2.4)$$

где  $p$  — нормальное давление,  $\vec{v}$  — вектор скорости в данной точке,  $\mu$  — коэффициент трения. Предположение  $\mu = \text{const}$  ведет к наиболее простой и грубой модели трения, не позволяющей объяснить, в частности, возникновение автоколебаний тормозной колодки [11]. Эксперименты Штрибека, в которых изучалась работа подшипников скольжения при наличии смазки, привели к зависимости  $\mu(v)$ , примерный вид которой показан на рисунке 2.

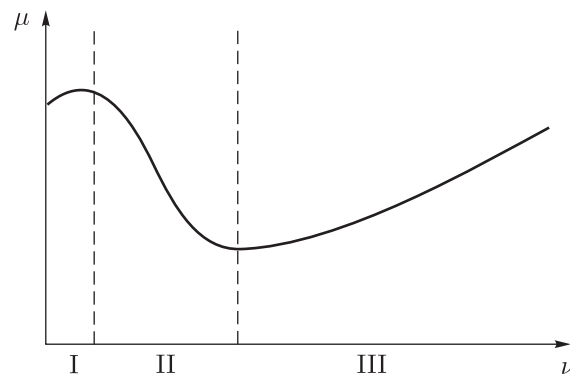


Рис. 2.

Области I–III здесь соответствуют различным физическим эффектам, вносящим наибольший вклад в силу трения, и называются областями граничного, смешанного и эласто-гидродинамического (толстый слой смазки) трения соответственно. Впоследствии Л. Гюмбель (1914), анализируя результаты Штрибека, полученные в различных условиях, обнаружил,

что правильнее откладывать на графике в качестве аргумента не скорость  $v$ , а величину  $\vartheta = \eta v/p$ , где  $\eta$  — вязкость используемой для смазки жидкости. Физический смысл этой величины — толщина пленки смазки.

Таким образом, формулу (2.4) можно обобщить, считая коэффициент  $\mu$  зависящим от  $v$  и  $p$ . Поскольку эта формула содержит вектор  $\vec{v}(A)$ , расчет интегралов (2.3) удобнее произвести в подвижной системе координат  $G'XY$ , в которой

$$\vec{v}(A) = (-\omega y_A, v_0 + \omega x_A), \quad (2.5)$$

где  $v_0$  — величина скорости точки  $G'$ ,  $\omega = \dot{\varphi} > 0$  — угловая скорость,  $(x_A, y_A)$  — координаты точки  $A$  в подвижной системе.

Линейная модель нормальных напряжений описывается формулой

$$p(A) = p_0 + p_1 x + p_2 y, \quad p_0 = 0, \quad (2.6)$$

причем  $p_0 = mg/S$  ( $S$  — площадь области  $D$ ), а коэффициенты  $p_1, p_2$  определяются из условия

$$\begin{aligned} \vec{M}_N + \vec{M}_T &= M\vec{k}, \\ \vec{M}_N &= \iint \vec{r}(A) \times \vec{k} p(A) dx dy, \quad \vec{M}_T = \iint G(A) \times \vec{f}(A) dx dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Формула (2.7) означает, что главный момент сил реакции плоскости вертикален, ввиду чего движение плоскопараллельно. Она равносильна системе двух (вообще говоря, нелинейных) уравнений вида

$$\begin{aligned} \iint y p(A) dx dy &= -h \iint f_y(A) dx dy, \\ \iint x p(A) dx dy &= -h \iint f_x(A) dx dy, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $h$  — высота центра масс тела над опорой. Если бы тело было пластиной, то  $h = 0$ , при этом  $p_1 = p_2 = 0$ . В обсуждаемой задаче величина  $h$  имеет тот же порядок, что диаметр основания, но имеется другая специфика: коэффициент трения камня о лед достаточно мал,  $\mu \leq 0.01$ . Это дает возможность решить систему методом простой итерации.

После определения коэффициентов формулы (2.6) можно рассчитать силу трения (2.2) в инерциальной системе координат, а затем подставить полученные значения в уравнения (2.3).

### 3. Качественный анализ соответствия различных законов трения эффекту керлинга

#### 3.1. Случай постоянного коэффициента трения

Допустим вначале, что  $\mu = \text{const}$ , что соответствует классическому закону сухого трения. Система (2.8) примет вид

$$\begin{aligned} p_2 \iint y^2 dx dy &= \mu h \iint \frac{v_0 + \omega x}{v} (p_0 + p_1 x + p_2 y) dx dy, \\ p_1 \iint x^2 dx dy &= -\mu h \iint \frac{\omega y}{v} (p_0 + p_1 x + p_2 y) dx dy, \\ v &= (\omega^2 y^2 + (v_0 + \omega x)^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При учете круговой симметрии области интегрирования  $D$  формулы (3.1) упрощаются:

$$\begin{aligned} p_2 \iint y^2 dx dy &= \mu h \iint \frac{v_0 + \omega x}{v} (p_0 + p_1 x) dx dy, \\ p_1 \iint x^2 dx dy &= -\mu h p_2 \iint \frac{\omega y^2}{v} dx dy. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.2) следуют оценки

$$p_2 = O(\mu), \quad p_1 = O(\mu^2), \quad p_1 < 0, \quad p_2 > 0. \quad (3.3)$$

Замечая, что в силу (2.7) вектор  $\vec{M}_N$  коллинеарен вектору  $(p_2, -p_1)$ , приходим к выводу, что он лежит в первой четверти. Отсюда по теореме 2 получим, что  $\vec{T}$  лежит в четвертой четверти. Это свидетельствует об отклонении траектория вправо, противоположно эффекту керлинга.

### 3.2. Коэффициент трения, зависящий от скорости

Следующий по сложности случай соответствует коэффициенту трения, зависящему от скорости скольжения:

$$\mu = \mu(v), \quad (3.4)$$

что соответствует результатам Штрибека. Справедливо следующее утверждение [10].

**Предложение 2.** Пусть область  $D$  обладает круговой симметрией, а функция  $\mu(A)$  зависит только от  $|\vec{v}(A)|$ . Тогда коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  в разложении (2.6) имеют противоположные знаки.

*Доказательство.* Величина  $|\vec{v}(A)| = \sqrt{(v + \omega x)^2 + (\omega y)^2}$  является четной по  $y$ , поэтому тем же свойством обладает функция  $\mu(A)$ . Отсюда в силу симметрии области  $D$  получаем

$$\iint_D \mu(A) \frac{y}{|\vec{v}(A)|} dS = \iint_D \mu(A) \frac{xy}{|\vec{v}(A)|} dS = 0. \quad (3.5)$$

Во втором уравнении (3.1) с учетом (3.5) получаем

$$\omega h p_2 \iint_D \mu(|\vec{v}(A)|) \frac{y^2}{|\vec{v}(A)|} dS = p_1 \iint x^2 dx dy, \quad (3.6)$$

что и доказывает сформулированное утверждение. ■

**Следствие.** Если функция  $\mu(A)$  зависит только от  $|\vec{v}(A)|$ , то искривление траектории влево возможно лишь в случае  $p_1 > 0$ ,  $p_2 < 0$ .

Рассмотрим первое уравнение (3.1):

$$h \iint_D \mu(|\vec{v}(A)|) \frac{(p_0 + p_1 x)(v + \omega x)}{|\vec{v}(A)|} dS = p_2 \iint y^2 dx dy. \quad (3.7)$$

Интеграл в левой части данного равенства может быть положителен при выполнении двух условий. Во-первых, величина  $v + \omega x$  может принимать отрицательные значения,

т. е. мгновенный центр скоростей лежит внутри круга контакта (в случае кольца — внутри внешнего круга). Во-вторых, функция  $\mu(|\vec{v}(A)|)$  убывает с ростом скорости. Действительно, сравнение двух точек с противоположными абсциссами и равными ординатами показывает, что значение дроби в подинтегральной функции (3.7) больше при  $x > 0$ , нежели при  $x < 0$ . В первой из этих точек модуль скорости больше, откуда и следует сформулированное свойство.

Таким образом, искривление траектории влево может иметь место в диапазоне II смешанного трения на кривой Штрибека (рис. 2), если вращательное движение доминирует над поступательным. Однако для достижения таких условий необходимо придать камню очень сильное вращение, что в игре не применяется.

### 3.3. Коэффициент трения, зависящий от числа Гюмбеля

Допустим теперь, что коэффициент трения является некоторой функцией от отношения модуля скорости к нормальной нагрузке:

$$\mu(A) = \mu \left( \frac{|\vec{v}(A)|}{p(A)} \right). \quad (3.8)$$

Примерный вид зависимости (3.8) представлен на рисунке 2. Ограничимся для простоты анализом линейных участков графика, полагая

$$\mu(A) = \mu_0 + \mu_1 \frac{|\vec{v}(A)|}{p(A)}. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.1) при подстановке (3.9) примут вид линейной алгебраической системы относительно  $p_1$  и  $p_2$ :

$$\begin{aligned} \mu_0 I_1 p_1 - \tilde{J} p_2 &= -\mu_0 I_0 p_0 - \mu_1 v S, & \tilde{J} p_1 + \mu_0 I_2 p_2 &= 0, \\ I_0 &= \iint \frac{(v + \omega x)}{|\vec{v}(A)|} dS, & I_1 &= \iint \frac{x(v + \omega x)}{|\vec{v}(A)|} dS, & I_2 &= \iint \frac{\omega y^2}{|\vec{v}(A)|} dS, \\ \tilde{J} &= \frac{1}{h} \iint x^2 dS. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Анализ этой системы приводит к таким результатам [10].

1°. Если  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ , то  $p_1 < 0$ ,  $p_2 > 0$ . Распределение нормального давления в области контакта аналогично случаю (3.3) постоянного коэффициента трения. Следовательно, траектория отклоняется вправо.

2°. В случае  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 < 0$  (второй участок графика на рис. 2) знаки коэффициентов  $p_1$ ,  $p_2$  зависят от кинематических характеристик. При относительно малых угловых скоростях получаем  $p_1 < 0$ ,  $p_2 > 0$  аналогично случаю 1°. С ростом отношения  $\omega/v$  будем иметь  $p_1 > 0$ ,  $p_2 < 0$ , что соответствует отклонению траектории влево с одновременным увеличением линейной скорости аналогично п.п. 3.2.

3°. Если  $\mu_0 < 0$ , то коэффициент  $\mu_1$  необходимо положителен (третий и, возможно, первый участки графика на рис. 2). При этом можно показать, что  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ , что означает отклонение траектории влево с одновременным уменьшением линейной скорости.

Подведем итог. Качественно эффект керлинга можно объяснить наличием зависимости коэффициента трения как от скорости скольжения, так и от нормального давления.



#### 4. Определение закона трения по экспериментальным данным

Несмотря на позитивный вывод о существовании законов трения, обеспечивающих отклонение траектории камня влево, расчеты, проведенные для большого количества гипотетических зависимостей вида (3.8), показали количественное несоответствие между численным экспериментом и реальными данными. Максимальное расчетное отклонение траектории составило менее 10 % от наблюдаемого. В работе [8] построены следующие аналитические аппроксимации экспериментальных данных на отрезке времени до 23 с:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(0.004t^2 - 0.185t + 2.98(1 - (1 - t/23)^{1.43})), \\ y'(t) &= 25(1 - (1 - t/23)^{1.897}), \quad \varphi(t) = 16.58(1 - (1 - t/24)^{1.455}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Согласно формулам (4.1), при  $t = 23$  продольное перемещение камня составляет 25 м, поперечное перемещение — 0.84 м, угол поворота 16.4 рад (около 2.6 оборота).

**Предложение 3.** Допустим, что трение описывается законом (2.4), где величина  $\mu$  может зависеть от времени и изменяться внутри области контакта по произвольному закону. Тогда траектория (4.1) невозможна.

*Доказательство.* Согласно закону (2.4), сила трения в каждой из точек контакта направлена противоположно вектору скорости. При вычислении по формуле (2.3) главный вектор сил трения  $\vec{T}$  составит с осью  $G'Y$  угол  $\beta$ , не превосходящий максимального из углов между вектором скорости в точке кольца контакта и этой осью. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta \leq \varepsilon / \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = R\omega/v, \quad (4.2)$$

где  $R$  — внешний радиус кольца. Формулы (4.1) позволяют рассчитать для каждого момента времени как величины скорости  $v$  и угловой скорости  $\omega$ , так и фактическую силу трения  $\vec{T}$ . Результаты расчетов показывают, что во все время движения неравенство (4.2) нарушено: правая часть не превосходит 70% от левой части.

Альтернативой формуле (2.4) является закон анизотропного трения [12]

$$\vec{f} = -\frac{\Phi \vec{v}}{|\vec{v}|} p, \quad (4.3)$$

где тензор трения  $\Phi$  — положительная матрица второго порядка. Согласно равенству (4.3), сила трения не обязательно коллинеарна вектору скорости. Данное обстоятельство можно пояснить примером скольжения ползуна по волнистой поверхности. При движении поперек волн возникает дополнительная (по сравнению с движением вдоль фронта волны) диссипация энергии, связанная с деформированием неровностей. В обоих случаях сила трения направлена противоположно скорости. Если же скорость направлена под острым углом к фронту волны, то сила трения образует с этим фронтом меньший угол.

В рассматриваемой задаче причиной анизотропии является появление пленки жидкости при таянии льда, вызванном движением камня. Фактически скорости точек передней части опорного кольца складываются из продольной (направление — наружу вдоль вектора скорости центра масс) и поперечной составляющих. Аналогично можно разложить скорости в точках задней кромки, при этом продольные составляющие направлены внутрь кольца. Для оценки четырех коэффициентов трения, соответствующих перечисленным направлениям, использовалась следующая модель.

Будем считать, что нормальная нагрузка равномерно распределена в точках окружности радиуса  $R = 54$  мм (поскольку коэффициент трения камня о лед примерно 0.01,



то неравномерность этого распределения составляет около 1 %). При расчете интегралов (2.3) в подвижной системе координат будем пренебрегать членами  $O(\varepsilon^2)$ , принимая во внимание что для траектории (4.1) имеем  $\varepsilon \in (0.03; 0.1)$ . Проектируя уравнения (2.1) на оси подвижной системы координат  $G'XY$ , получим систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}' \cos \alpha - \ddot{y}' \sin \alpha &= \frac{\varepsilon g}{\pi} (\mu_{1c} - \mu_{2c}), & \ddot{x} \sin \alpha + \ddot{y} \cos \alpha &= -\frac{g}{2} (\mu_{1l} + \mu_{2l}), \\ \rho^2 \ddot{\varphi} &= -\frac{R\varepsilon g}{4} (\mu_{1c} + \mu_{2c}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  — угол между осями  $OX'$  и  $G'X$ , индексы 1 и 2 в обозначении коэффициентов трения  $\mu$  соответствуют передней и задней кромкам контакта, а индексы  $l$  и  $c$  — продольному и поперечному направлениям.

Система (4.4) однозначно разрешима относительно  $\mu_{1c}$  и  $\mu_{2c}$ :

$$\begin{aligned} \mu_{1c} &= (\ddot{x}' \cos \alpha - \ddot{y}' \sin \alpha) \frac{\pi}{2\varepsilon g} - \frac{2\rho^2}{\varepsilon g R} \ddot{\varphi}, \\ \mu_{2c} &= -(\ddot{x}' \cos \alpha - \ddot{y}' \sin \alpha) \frac{\pi}{2\varepsilon g} - \frac{2\rho^2}{\varepsilon g R} \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Расчеты по формулам (4.1) проводились на интервале  $t \leq 20$  с. Коэффициент  $\mu_{1c}$  изменялся от величины 0.001 до 0.002 (при  $t = 14$  с), а затем уменьшался до 0.0004. Коэффициент  $\mu_{2c}$  изменялся в интервале от 0.056 до 0.057. Что касается «продольных» коэффициентов  $\mu_{1l}$  и  $\mu_{2l}$ , то имеющиеся данные не позволяют определить их однозначно: второе уравнение (4.4) позволяет найти их среднее. Как показали расчеты, полусумма этих коэффициентов с ростом времени возрастала от 0.008 до 0.01. Эти данные свидетельствуют о том, что на задней кромке коэффициент «поперечного» трения в несколько (3–5) раз превышает коэффициент «продольного» трения.

## 5. Выводы

При построении моделей контактного взаимодействия тел с плоским основанием, движущихся по опоре, следует учитывать, что распределение нормальной нагрузки и закон трения взаимосвязаны условием сохранения контакта. Это обстоятельство позволяет провести качественный анализ и отбросить гипотезы о характере трения, заведомо не соответствующие наблюдаемым явлениям. Доказано, что качественно объяснить эффект керлинга можно лишь при учете зависимости коэффициента трения в формуле Кулона от скорости и давления.

Что касается количественного анализа, оказалось, что никакой закон изотропного трения не соответствует экспериментальным данным. Следовательно, физика явления, включающая подтаивание льда и образование пленки смазки неравномерной толщины, обуславливает зависимость коэффициента трения от направления скольжения. В общем случае тензор трения может зависеть от точки области контакта и динамических характеристик, поэтому существует большое разнообразие в выборе модели анизотропного трения. Верификация такой модели требует анализа большого числа экспериментов.

В данной работе представлена одна из простейших моделей, позволяющая достичь количественного совпадения с единичным экспериментом и не претендующая на универсальность. Ее можно рассматривать как первый шаг к разрешению загадок керлинга. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения закономерностей трения по льду при решении практических задач, обсуждаемых, к примеру, в [12].

## Список литературы

- [1] Harrington E. L. An experimental study of the motion of curling stones // Trans. Royal Soc. Canada, 1924, vol. 8, pp. 247–259.
- [2] Johnston G. W. The dynamics of a curling stone // Canadian Aeronautics and Space J., 1981, vol. 27, pp. 144–160.
- [3] Shegelski M. R. A., Niebergall R., Walton M. A. The motion of a curling rock // Canadian J. Phys., 1996, vol. 74, pp. 663–670.
- [4] Denny M. Curling rock dynamics // Canadian J. Phys., 1998, vol. 76, pp. 295–304.
- [5] Shegelski M. R. A. The motion of a curling rock: Analytical approach // Canadian J. Phys., 2000, vol. 78, no. 9, pp. 857–864.
- [6] Penner A. R. The physics of sliding cylinders and curling rocks // Amer. J. Phys., 2001, vol. 69, no. 3, pp. 332–339.
- [7] Denny M. Curling rock dynamics: Towards a realistic model // Canadian J. Phys., 2002, vol. 80, pp. 1005–1014.
- [8] Jensen E. T., Shegelski M. R. A. The motion of a curling rock: Experimental investigation and semi-phenomenological description // Canadian J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 791–809.
- [9] Shegelski M. R. A., Goodwin G. L., Booth R., Bagnall P., Reid M. Exact normal forces and trajectories for a rotating tripod sliding on a smooth surface // Canadian J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 875–890.
- [10] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 302 с.
- [11] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1956. 915 с.
- [12] Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 234 с.
- [13] Вершинин С. А., Трусков П. А. Трение и истирающее воздействие льда на сооружения континентального шельфа. М.: Атлет-пресс, 2010. 196 с.

## On the motion of a heavy body with a circular base on a horizontal plane and riddles of curling

Alexander P. Ivanov<sup>1</sup>, Nikolay D. Shuvalov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology

Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700, Russia

<sup>1</sup>apivanov@orc.ru, <sup>2</sup>shuvalovnickolay@gmail.com

In this paper we discuss the dynamics of an axisymmetric rigid body whose circular area moves upon a horizontal rough surface. We investigate the interaction between the character of the law of friction and the curvature of the body's trajectory. For the case of a curling stone it is shown that the observed effects can only be explained using the dependence of the friction coefficient on the Gumbel number. The procedure for constructing the law of friction based on experimental data is developed. It is shown that the available data can only be substantiated by means of anisotropic friction. The simplest model of such friction is constructed which provides quantitative coincidence with the experiment.

MSC 2010: 70E18, 70F40, 74M10

Keywords: mixed friction, Stribeck curve, curling rock dynamics

Received July 12, 2011, accepted August 21, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 521–530 (Russian)

